



TITLE:

# 空間的な周期性をもつ接続はり系 を伝播する波動 (非線形波動現象の 数理とその応用)

AUTHOR(S):

渡辺, 陽介; 杉本, 信正

---

CITATION:

渡辺, 陽介 ...[et al]. 空間的な周期性をもつ接続はり系を伝播する波動  
(非線形波動現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 2003, 1311:  
224-236

ISSUE DATE:

2003-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/42930>

RIGHT:

# 空間的な周期性をもつ接続はり系を伝播する波動

阪大院・基礎工 渡辺陽介 (Yosuke WATANABE),

杉本信正 (Nobumasa SUGIMOTO)

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

## 1 はじめに

同じ形状・性質をもつ要素(ユニット)をいくつも接続することによって, 目的とする長大構造物を構築することがある. 例えば, 列車, パイプライン, メガフロート(超大型浮体式構造物. 主に海上空港に利用されている), 宇宙構造物等が挙げられる. このような接続された構造物を用いる利点として, 必要に応じて長さを自由に変えられること, 既存の施設や機能を稼働させながら拡張できること, 各ユニットの作成を同時に進められるため効率や経済性に優れていること等が挙げられる. それゆえ今後益々の利用・開発が期待される. しかしこのような空間的な周期性をもつ構造物は長大であるがゆえに様々な不安定性に晒されることが懸念される. 周期性をもつ構造物の連結部分において波が反射や減衰, 局在化し, 構造物が複雑で予想外の変位, 振動をする可能性や [1, 2], また流れがあると, 激しい自励振動を引き起こして大振幅の揺れを招き, 最終的に構造物が崩壊に至る可能性もある. 一般に空間について周期的な系を伝播する波は Bloch 波として知られているが [3], 本稿ではシンプルな力学モデルである**接続はり**を考え(図 1), 線形波の伝播特性を調べたので報告する.

接続はりとはユニットである多数の「はり」がそれぞれその両端で隣のはりと連結部によってつながれている. 連結部は支点を中心とするはりの回転に対して, 回転角に比例した復元回転力をばねによって与える構造をもっており, ここでは「回転ばね」とよぶことにする(図 2). 一様で長い弾性はりが長波長の攪乱の伝播を記述するモデルであるのに対して, 接続はりとは空間的な周期構造を伝播する短波長の攪乱を記述するモデルといえる. 以下, 接続はりを構成するユニット

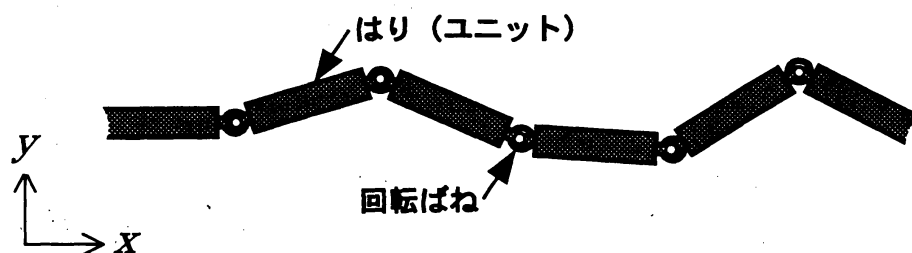


図 1: 接続はりモデル

が剛体はりであるものを**接続剛体はり**, ユニットが弾性はりであるものを**接続弾性はり**とよぶことにし, それぞれの接続はり系を伝播する波の特性について, 第 2 章, 第 3 章で考察を行う.

## 2 接続剛体はりモデル

まず接続剛体はりの運動を支配する方程式の導出を行う. 接続剛体はりの運動が  $x$ - $y$  平面内に限定されているとし,  $j$  番目のユニット ( $j = \dots, -1, 0, 1, \dots$ ) について, その幾何的配置と受け

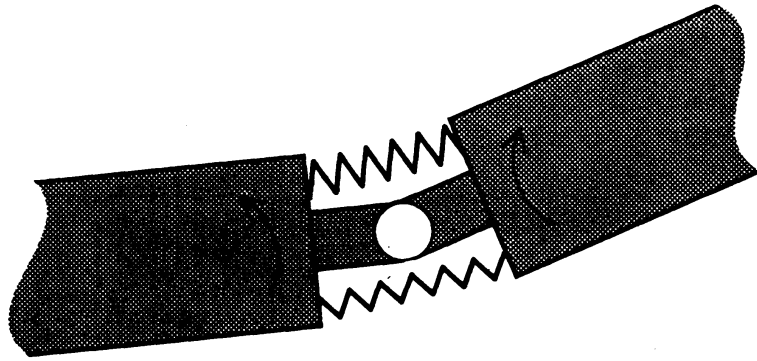
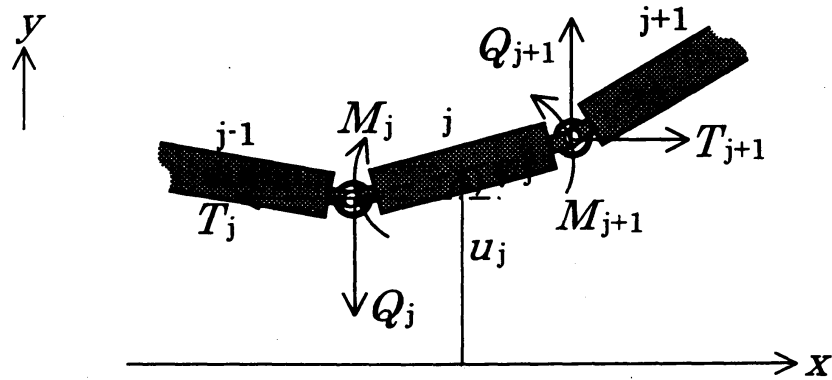


図 2: 連結部の拡大図 (回転ばね)

る力, モーメントを図 3 のように定義する. ここで  $T_j$ ,  $Q_j$ ,  $u_j$ ,  $\varphi_j$  はそれぞれ

図 3:  $j$  番目のユニットに働く力とモーメント

$T_j$ :  $j$  番目のユニットの左端に作用する  $x$  方向の力,

$Q_j$ :  $j$  番目のユニットの左端に作用する  $y$  方向の力,

$M_j$ :  $j$  番目のユニットの左端に作用する回転ばねによるモーメント,

$u_j$ :  $j$  番目のユニットの重心の  $y$  座標,

$\varphi_j$ :  $j$  番目のユニットの中心線が  $x$  軸となす角

であり, 図に示す向きを正とする. またユニットと回転ばねに関する諸量を次のように表す:

$l_R$ : ユニットの長さ,

$\rho_R$ : ユニットの線密度,

$I$ : 重心回りの慣性モーメント,

$K_R$ : 回転ばねのばね定数でモーメントの次元をもつ.

以下では  $\varphi_j$  が小さいと仮定して線形近似し, 張力  $T_j$  を無視して解析を進める.  $j$  番目のユニットについて, 鉛直方向の運動, 回転運動および幾何的条件 (重心の位置) を記述する方程式はそれ

$$\rho_R l_R \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = Q_{j+1} - Q_j,$$

$$I \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t^2} = K_R (\varphi_{j+1} - \varphi_j) - K_R (\varphi_j - \varphi_{j-1}) + \frac{l_R}{2} (Q_{j+1} + Q_j) \cos \varphi_j,$$

$$u_j = u_{j-1} + \frac{l_R}{2} \sin \varphi_{j-1} + \frac{l_R}{2} \sin \varphi_j$$

となるが、 $\varphi_j$  が十分小さいとする仮定を用いると上の方程式系は次のようになる:

$$\rho_R l_R \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = Q_{j+1} - Q_j,$$

$$I \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t^2} = K_R (\varphi_{j+1} - \varphi_j) - K_R (\varphi_j - \varphi_{j-1}) + \frac{l_R}{2} (Q_{j+1} + Q_j),$$

$$\varphi_j + \varphi_{j-1} = \frac{2}{l_R} (u_j - u_{j-1}).$$

$j-1, j+1$  番目のユニットについても同様の方程式系が成り立つので、これらを用いると次の運動方程式が得られる:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_R l_R^2}{2} \frac{\partial^2 (u_{j+1} + 2u_j + u_{j-1})}{\partial t^2} + \frac{2K_R}{l_R} (u_{j+2} - 4u_{j+1} + 6u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2}), \\ - \frac{2I}{l_R} \frac{\partial^2 (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

方程式 (1) の分散関係を求めるため  $j$  番目のユニットを伝播する波を

$$u_j = \exp i[(\kappa l_R j - \omega_R t)]$$

と書くと、次のように分散関係が求まる。 $\Omega_R$  は無次元数である:

$$\begin{aligned} \Omega_R^2 &\equiv \frac{\rho_R l_R^3}{K_R} \omega_R^2, \\ &= \frac{4 \sin^4(\kappa l_R/2)}{(1/4) \cos^2(\kappa l_R/2) + (I/\rho_R l_R^3) \sin^2(\kappa l_R/2)}. \end{aligned} \quad (2)$$

式 (2) の関係を図 4 に示す。図 4 から振動数の大きな波 ( $\Omega_R > 2$ ) は伝播しないこと、また  $\kappa l_R \rightarrow 0$  で分散曲線の傾きが 0 となり、長波長極限で有限の傾きをもつ通常のばね-質点連成振動系の分散関係の特徴とは異なっていることが分かる。

さらに (1) 式で連続体近似

$$\begin{aligned} u_{j+1} + 2u_j + u_{j-1} &\simeq 4u(l_{Rj}, t), \\ \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{l_R^2} &\simeq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{l_{Rj}, t} \end{aligned}$$

を行うと

$$\rho_R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + K_R l_R \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{I}{l_R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

となる。上式の第 3 項ははりの回転慣性を表すが、この項を無視すればよく知られた弾性はりの撓み運動の方程式と一致することが分かる [4]。

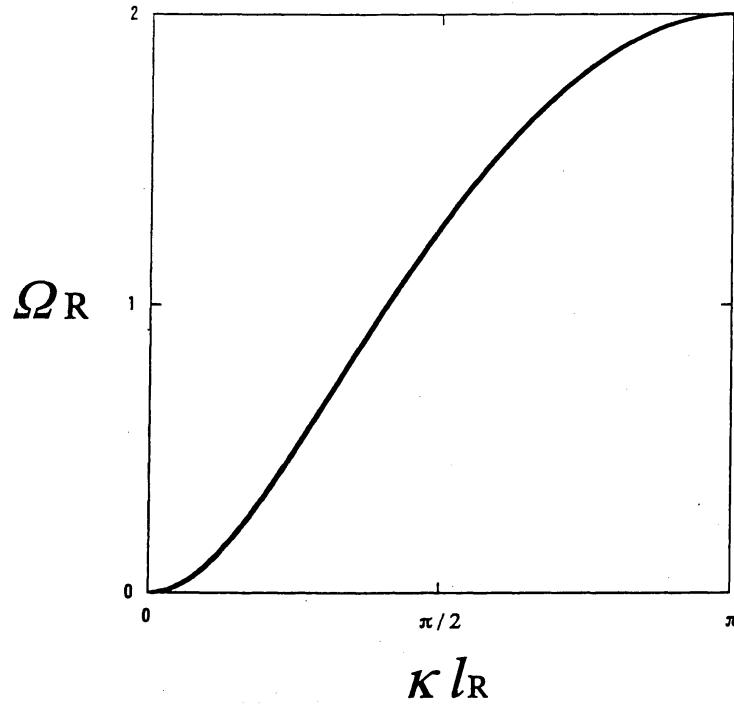


図 4: 連接剛体はりを伝播する波の分散関係 ( $l_R = 1.0$ ,  $\rho_R = 1.0$ ,  $I = 1.0$ )

### 3 連接弾性はりモデル

#### 3.1 方程式と境界条件

本章では連接弾性はりを伝播する波について考察する. 前章と同様に連接弾性はりの運動は  $x$ - $y$  平面内に限定されている (図 5).  $j$  番目のユニット ( $j = \dots, -1, 0, 1, \dots$ ) の中点を原点とする座標系  $\xi_j$ , ( $-l/2 \leq \xi_j \leq l/2$ ) を導入し,  $\xi_j$  における撓みを  $w_j$  で表す. またユニットに関する諸

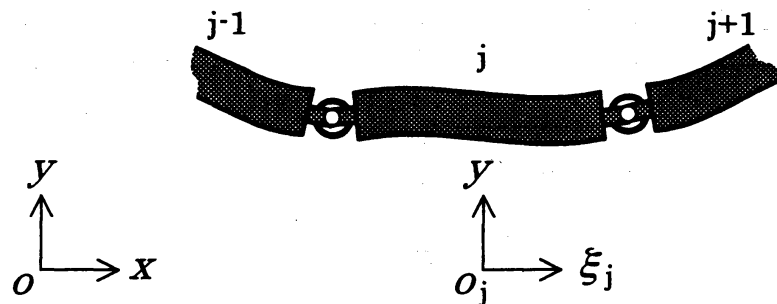


図 5:  $j$  番目の連接弾性はりユニットと座標系

量を次のように表す:

- $l$ : ユニットの長さ,
- $\rho$ : ユニットの線密度,
- $E$ : ヤング率,
- $J$ : 断面慣性モーメント,
- $(EJ$ : ユニットの曲げこわさ),
- $K$ : 回転ばねのばね定数.

以下では個々のユニットの撓みは小さいと仮定し, ユニットの中心線と  $\xi_j$  軸とのなす角  $\phi_j$  が小さいとして解析を進める. ( $\phi_j \simeq \partial w_j / \partial \xi_j$ )

$j$  番目のユニットの撓み運動の方程式は次のように書くことができる:

$$\rho \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w_j}{\partial \xi_j^4} = 0. \quad (3)$$

(3) 式の解を変数分離形

$$w_j(\xi_j, t) = H_j(\xi_j) \cdot \exp(-i\omega_E t) + \text{c.c.} \quad (4)$$

とおくと次の常微分方程式を得る:

$$\frac{d^4 H_j}{d\xi_j^4} - \frac{\rho}{EJ} \omega_E^2 H_j = 0. \quad (5)$$

従って方程式 (5) の一般解は

$$\begin{aligned} H_j(\xi_j) = & A_j \exp(+\sqrt{\Omega_E} \xi_j / l) + B_j \exp(-\sqrt{\Omega_E} \xi_j / l) \\ & + C_j \exp(+i\sqrt{\Omega_E} \xi_j / l) + D_j \exp(-i\sqrt{\Omega_E} \xi_j / l) \end{aligned} \quad (6)$$

で与えられる. ここで

$$\Omega_E \equiv l^2(\rho/EJ)^{1/2} \omega_E$$

は無次元数であり,  $A_j, B_j, C_j, D_j$  は以下の境界条件から定まる未定定数である. 境界条件として,  $j$  番目のユニットの右端 ( $\xi_j = l/2$ ) と  $j+1$  番目のユニットの左端 ( $\xi_{j+1} = -l/2$ ) で, 変位, モーメント, せん断力が連続していることが要求される:

$$H_j(l/2) = H_{j+1}(-l/2), \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial^2 H_j}{\partial \xi_j^2} \right|_{\xi_j=l/2} = \left. \frac{\partial^2 H_{j+1}}{\partial \xi_{j+1}^2} \right|_{\xi_{j+1}=-l/2}, \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial^3 H_j}{\partial \xi_j^3} \right|_{\xi_j=l/2} = \left. \frac{\partial^3 H_{j+1}}{\partial \xi_{j+1}^3} \right|_{\xi_{j+1}=-l/2}. \quad (9)$$

またユニットの両端において, 隣接するユニットと回転ばねによって接続されており, モーメント

$$M_{j+1} = K \left( \phi_{j+1} \Big|_{\xi_{j+1}=-l/2} - \phi_j \Big|_{\xi_j=l/2} \right)$$

が作用するので

$$EJ \frac{\partial^2 H_{j+1}}{\partial \xi_{j+1}^2} \bigg|_{\xi_{j+1}=-l/2} = K \left( \phi_{j+1} \bigg|_{\xi_{j+1}=-l/2} - \phi_j \bigg|_{\xi_j=l/2} \right)$$

が成り立つが,  $\phi_j$  が十分小さいとしているので

$$EJ \frac{\partial^2 H_{j+1}}{\partial \xi_{j+1}^2} \bigg|_{\xi_{j+1}=-l/2} = K \left( \frac{\partial H_{j+1}}{\partial \xi_{j+1}} \bigg|_{\xi_{j+1}=-l/2} - \frac{\partial H_j}{\partial \xi_j} \bigg|_{\xi_j=l/2} \right) \quad (10)$$

と書くことができる.

### 3.2 Bloch 波の分散関係式

解 (6) を境界条件 (7) ~ (10) に代入して整理すると, 関係式

$$\mathbf{X}_{j+1} = W \mathbf{X}_j \quad (11)$$

を得る. ここで行列  $\mathbf{X}_j$ ,  $W$  は

$$\mathbf{X}_j = [A_j, B_j, C_j, D_j]^t, \quad (12)$$

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$w_{11} = (+\chi\sqrt{\Omega_E} + 4) \exp(+\sqrt{\Omega_E}),$$

$$w_{12} = -w_{21} = +\chi\sqrt{\Omega_E},$$

$$w_{13} = w_{14}^* = -\chi\sqrt{\Omega_E} \exp(+\sqrt{\Omega_E}/2) \exp(+i\sqrt{\Omega_E}/2),$$

$$w_{22} = (-\chi\sqrt{\Omega_E} + 4) \exp(-\sqrt{\Omega_E}),$$

$$w_{23} = w_{24}^* = +\chi\sqrt{\Omega_E} \exp(-\sqrt{\Omega_E}/2) \exp(+i\sqrt{\Omega_E}/2),$$

$$w_{31} = w_{41}^* = -i\chi\sqrt{\Omega_E} \exp(+\sqrt{\Omega_E}/2) \exp(+i\sqrt{\Omega_E}/2),$$

$$w_{32} = w_{42}^* = -i\chi\sqrt{\Omega_E} \exp(-\sqrt{\Omega_E}/2) \exp(+i\sqrt{\Omega_E}/2),$$

$$w_{33} = w_{44}^* = (+i\chi\sqrt{\Omega_E} + 4) \exp(+i\sqrt{\Omega_E}),$$

$$w_{34} = w_{43}^* = +i\chi\sqrt{\Omega_E}$$

であり,  $\chi$  は無次元数で

$$\chi = \frac{EJ}{Kl}$$

である.  $\chi$  の値が大きくなるとユニットである弾性はりは剛体はりに近づく.

関係式 (11) より

$$\mathbf{X}_j = \lambda^j \mathbf{p} \quad (\mathbf{p} \text{ は定数ベクトル}) \quad (14)$$

とおくと,  $\lambda$  は  $W$  の固有値となり

$$\lambda^2 + a\lambda + b + a\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} = 0. \quad (15)$$

の解として得られる. ここで係数  $a, b$  は

$$a = -2 \cosh \sqrt{\Omega_E} - \frac{1}{2} \chi \sqrt{\Omega_E} \sinh \sqrt{\Omega_E} - 2 \cos \sqrt{\Omega_E} + \frac{1}{2} \chi \sqrt{\Omega_E} \sin \sqrt{\Omega_E},$$

$$b = 2 + 4 \cosh \sqrt{\Omega_E} \cos \sqrt{\Omega_E} + \chi \sqrt{\Omega_E} \cos \sqrt{\Omega_E} \sinh \sqrt{\Omega_E} - \chi \sqrt{\Omega_E} \sin \sqrt{\Omega_E} \cosh \sqrt{\Omega_E}$$

で与えられる. 方程式 (15) の解を  $\lambda_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) として実際に求めると

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{4} \left( D_+ + \sqrt{D_+^2 - 16} \right),$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_4} = \frac{1}{4} \left( D_- + \sqrt{D_-^2 - 16} \right)$$

が得られる. 但し

$$D_{\pm} = -a \pm \sqrt{a^2 - 4b + 8} \quad (\text{複号同順})$$

であり,  $\lambda_n$  は, 方程式 (15) の形から,  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  と  $\lambda_4$  がそれぞれ逆数の関係になることが分かる. また  $\Omega_E > 0$  に対し,  $a < -4$ ,  $a^2 - 4b + 8 > 0$  が成り立つので,  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  は常に正の実数,  $\lambda_3$  と  $\lambda_4$  は実数または互いに共役な複素数であることが分かる.  $\lambda_3$  ( $\lambda_4$ ) は虚部を持つ場合  $|\lambda_3|$  ( $= |\lambda_4|$ ) = 1 である. さらに式 (6), (12), (14) を考慮して,  $\lambda_n^j$  を式 (4) の  $\exp(-i\omega_E t)$  の位相に組み入れるために  $\lambda_n$  を

$$\lambda_n = \exp(iq_n l) \quad (16)$$

とおくことにする. 複素数  $q_n$  を

$$q_n = q_{n,r} + i q_{n,i} \quad (17)$$

と表したときの,  $\omega_E$  に対する  $q_{n,r}$  と  $q_{n,i}$  ( $n = 1, 3$ ) の関係を図 6, 7 に示す.  $(q_{n,r} l, \Omega_E)$  が伝播する波の分散特性,  $q_{n,i} l$  が波の減衰率を与える. 既に述べたように  $\lambda_1$  は正の実数であるから, 常に  $q_{1,r} l = 0$ ,  $q_{1,i} l < 0$  である.  $\lambda_2$  は  $\lambda_1^{-1}$  であるから  $q_{2,r} l = 0$ ,  $q_{2,i} l = -q_{1,i} l$  であり,  $q_2$  の曲線は  $q_1$  の  $\Omega_E$  軸に対称な曲線として得られる.  $q_3$  についてはバンド構造が見られ,  $\Omega_E$  の値によって波が伝播する場合と伝播しない場合があることが分かる. ( $q_{3,r} l = \pi$  の部分は  $\lambda_3$  の符号の変化を与えており, 分散特性を与える実質的な  $q_{3,r} l$  は存在しない.)  $\lambda_4$  は  $\lambda_3^{-1}$  であるから,  $q_4$  の曲線は  $q_3$  の  $\Omega_E$  軸に対称な曲線として得られる. 図 7 で原点から出ている最低次の  $q_{3,r} l$  の“枝”は接続剛体はりの分散曲線 (図 4) と定性的に等しく, それゆえ  $\lambda_1$  ( $\lambda_2$ ) に関するモードは, 接続剛体はりには見られない接続弾性はり特有のモードであることが分かる.  $\lambda_2, \lambda_4$  が表す波は, それぞれ  $\lambda_1, \lambda_3$  が表す波と逆向きに伝播する波を表している. なお  $\chi$  の値を変化させたときに得られる  $q_1, q_3$  の図は, それぞれ, 図 6, 7 と同様の特徴が見られる.



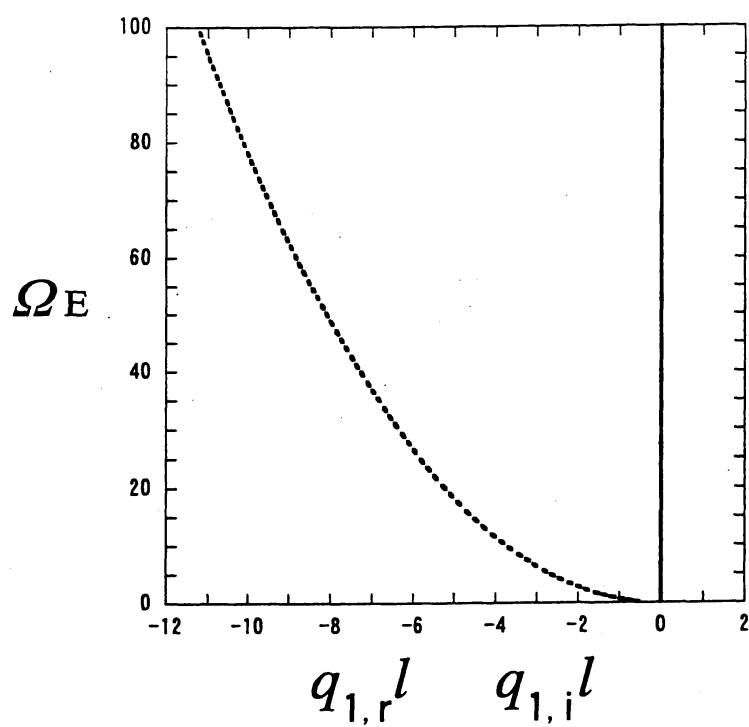


図 6:  $\lambda_1$  に関する波の特性 ( $\chi = 1.0$ ) . 実線: 分散曲線 ( $q_{1,r}l, \Omega_E$ ), 破線: 減衰率 ( $q_{1,i}l, \Omega_E$ )

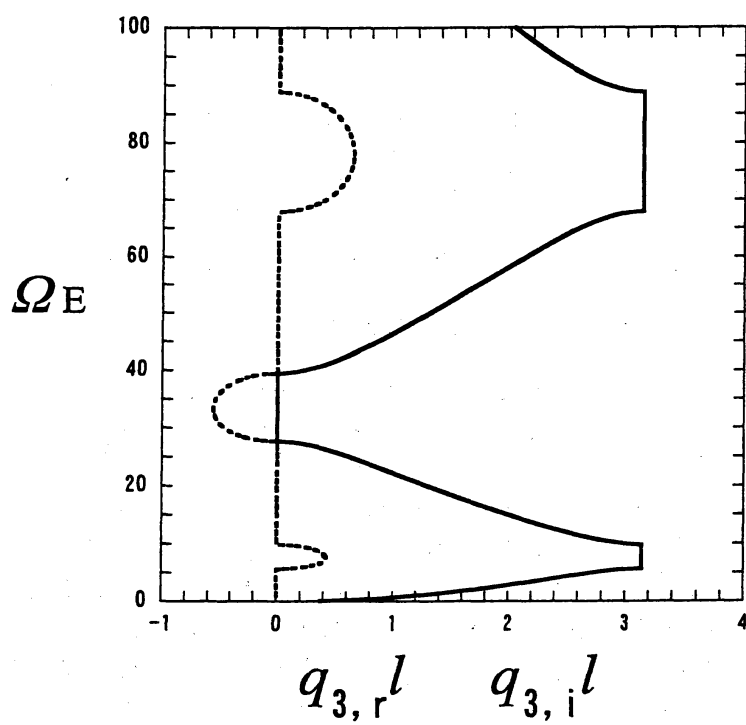


図 7:  $\lambda_3$  に関する波の特性 ( $\chi = 1.0$ ) . 実線: 分散曲線 ( $q_{3,r}l, \Omega_E$ ), 破線: 減衰率 ( $q_{3,i}l, \Omega_E$ )

### 3.3 Bloch の波動関数

次に各  $\lambda_n$  に関する固有ベクトル  $\mathbf{P}_n$  を求める。  $\mathbf{P}_n$  は

$$\mathbf{P}_n = \begin{bmatrix} +\exp(+\sqrt{\Omega_E}/2) (\exp(-\sqrt{\Omega_E}) - \lambda_n) (\exp(+i\sqrt{\Omega_E}) - \lambda_n) (\exp(-i\sqrt{\Omega_E}) - \lambda_n) \\ -\exp(-\sqrt{\Omega_E}/2) (\exp(+\sqrt{\Omega_E}) - \lambda_n) (\exp(+i\sqrt{\Omega_E}) - \lambda_n) (\exp(-i\sqrt{\Omega_E}) - \lambda_n) \\ -i \exp(+i\sqrt{\Omega_E}/2) (\exp(-i\sqrt{\Omega_E}) - \lambda_n) (\exp(+\sqrt{\Omega_E}) - \lambda_n) (\exp(-\sqrt{\Omega_E}) - \lambda_n) \\ +i \exp(-i\sqrt{\Omega_E}/2) (\exp(+i\sqrt{\Omega_E}) - \lambda_n) (\exp(+\sqrt{\Omega_E}) - \lambda_n) (\exp(-\sqrt{\Omega_E}) - \lambda_n) \end{bmatrix}$$

と計算できるので、結局、式 (6) の係数  $A_j, B_j, C_j, D_j$  は

$$\mathbf{X}_j = \alpha_1 \lambda_1^j \mathbf{P}_1 + \alpha_2 \lambda_2^j \mathbf{P}_2 + \alpha_3 \lambda_3^j \mathbf{P}_3 + \alpha_4 \lambda_4^j \mathbf{P}_4 \quad (18)$$

と表すことができる。ここで  $\alpha_n$  は任意定数である。

$j$  番目のユニットの  $\xi_j$  に関する変位  $H_j(\xi_j)$  は式 (6) から、 $-l/2 \leq \xi_j \leq l/2$  で定義される関数  $E_j$ :

$$E_j(\xi_j) = \left( \exp(+\sqrt{\Omega_E} \xi_j / l), \exp(-\sqrt{\Omega_E} \xi_j / l), \exp(+i\sqrt{\Omega_E} \xi_j / l), \exp(-i\sqrt{\Omega_E} \xi_j / l) \right)$$

を用いて

$$H_j(\xi_j) = \alpha_1 \lambda_1^j E_j(\xi_j) \cdot \mathbf{P}_1 + \alpha_2 \lambda_2^j E_j(\xi_j) \cdot \mathbf{P}_2 + \alpha_3 \lambda_3^j E_j(\xi_j) \cdot \mathbf{P}_3 + \alpha_4 \lambda_4^j E_j(\xi_j) \cdot \mathbf{P}_4 \quad (19)$$

と表すことができる。一方、任意の点  $x = \xi_j + lj$  での撓みを  $H(x)$  とすると、 $-l/2 \leq \xi_j \leq l/2$  を満たす  $j$  に対して  $H(x) = H_j(x - lj) = H_j(\xi_j)$  となる:

$$H(x) = \alpha_1 \exp(iq_1 x) f_1(\xi_j) + \alpha_2 \exp(iq_2 x) f_2(\xi_j) + \alpha_3 \exp(iq_3 x) f_3(\xi_j) + \alpha_4 \exp(iq_4 x) f_4(\xi_j).$$

但し

$$f_n(\xi_j) = \exp(-iq_n \xi_j) E(\xi_j) \cdot \mathbf{P}_n$$

とおいた。  $f_n(\xi_j)$  は  $j$  には依らず  $\xi_j$  のみに依存するので、

$$f_n(\xi_j) = f_n(X), \quad X = x - lj, \quad -\frac{l}{2} \leq X < \frac{l}{2}$$

として周期  $l$  で  $-\infty < x < \infty$  に拡張すると、  $H(x)$  は一般に

$$H(x) = \alpha_1 \exp(iq_1 x) f_1(X) + \alpha_2 \exp(iq_2 x) f_2(X) + \alpha_3 \exp(iq_3 x) f_3(X) + \alpha_4 \exp(iq_4 x) f_4(X) \quad (20)$$

と書くことができる。  $f_n(X)$  は  $H(x)$  の形を実質的に与えている。  $\chi = 1.0$ ,  $\Omega_E = 0.01$  の場合の  $f_n(X)$  の様子を図 8~10 に、  $\chi = 1.0$ ,  $\Omega_E = 15.0$  の場合の  $f_n(X)$  の様子を図 11~13 に示す。なおこれらの場合、図 7 から分かるように  $q_{3,i} = q_{4,i} = 0$  であるから、  $f_4(X)$  は  $f_3(X)$  の複素共役となり、  $f_4(X)$  の虚部の曲線は  $f_3(X)$  のそれと  $X$  軸に関して対称な曲線となる。また  $\Omega_E = 0.01$ ,  $\Omega_E = 15.0$  の波の分散特性はそれぞれ、図 7 の  $q_{3,r} l$  の最低次、第二次の“枝”が与えていることを注意しておく。図 8~10 で見られる「ユニットの形状がほぼ直線である」という結果はユニットの振舞いが剛体的であることを示しており、前節で述べた、  $\Omega_E$  が十分小さい場合の  $q_3$  ( $q_4$ ) に関する波の伝播（最低次の分散特性）は連接剛体はりのそれと定性的に等しい、ということを裏付けているといえる。

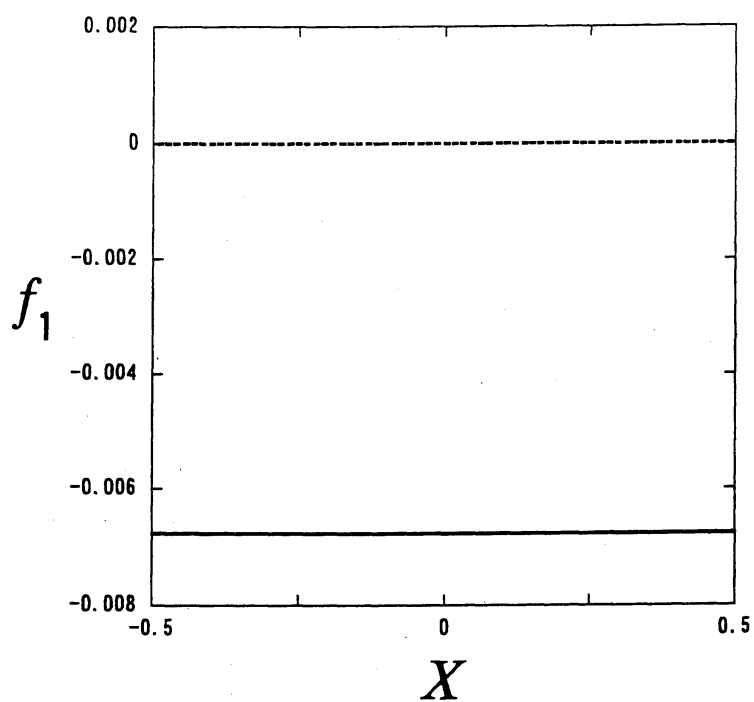


図 8:  $f_1(X)$  の関数形 ( $l = 1.0, \chi = 1.0, \Omega_E = 0.01, q_{1,i}l = -5.95 \times 10^{-2}$ ) . 実線:  $f_1(X)$  の実部, 破線:  $f_1(X)$  の虚部

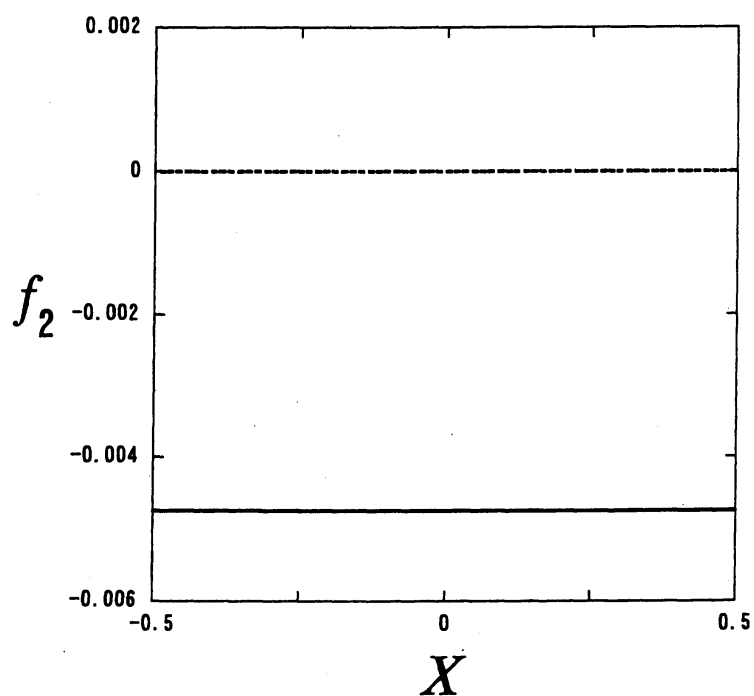


図 9:  $f_2(X)$  の関数形 ( $l = 1.0, \chi = 1.0, \Omega_E = 0.01, q_{2,i}l = 5.95 \times 10^{-2}$ ) . 実線:  $f_2(X)$  の実部, 破線:  $f_2(X)$  の虚部

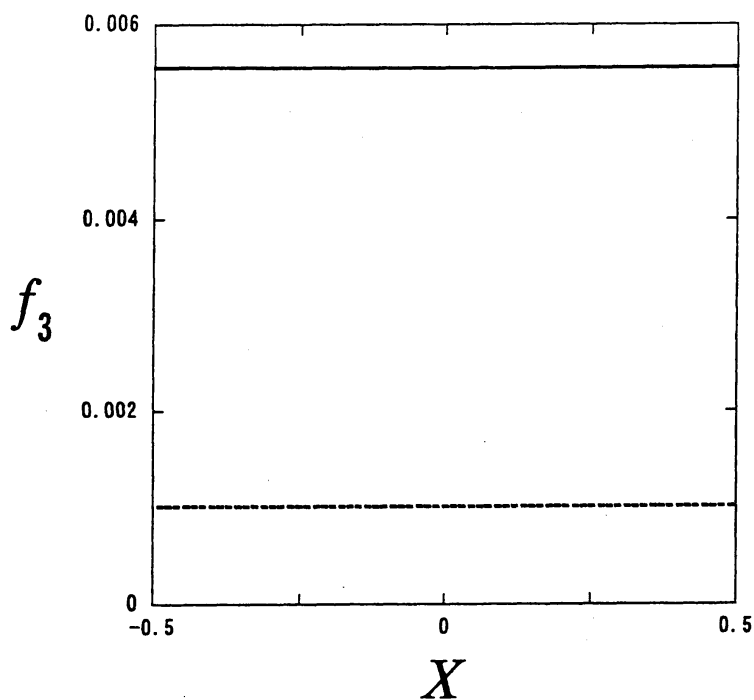


図 10:  $f_3(X)$  の関数形 ( $l = 1.0, \chi = 1.0, \Omega_E = 0.01, q_{3,r}l = 1.19 \times 10^{-1}$ ) . 実線:  $f_3(X)$  の実部, 破線:  $f_3(X)$  の虚部.  $f_4(X)$  の実部は  $f_3(X)$  の実部と同じ.  $f_4(X)$  の虚部は  $f_3(X)$  の虚部と  $X$  軸対称

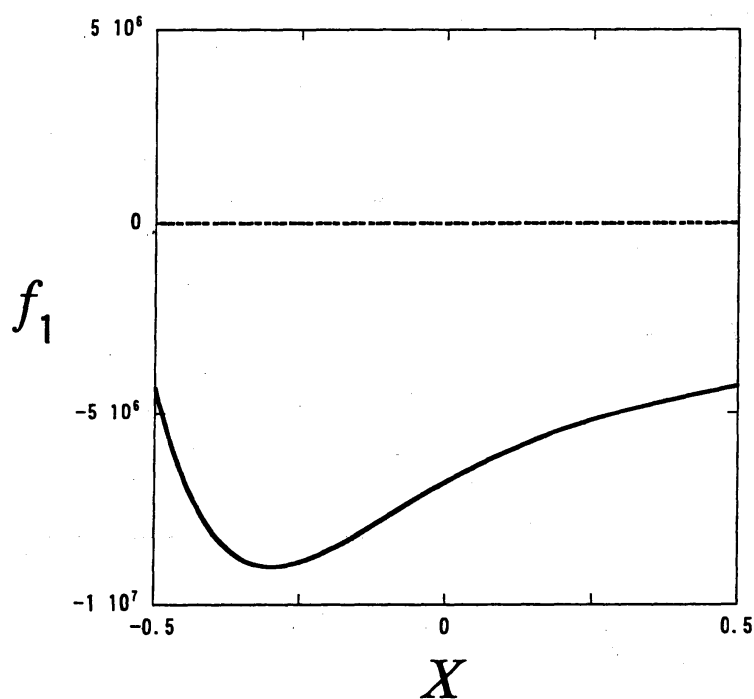


図 11:  $f_1(X)$  の関数形 ( $l = 1.0, \chi = 1.0, \Omega_E = 15.0, q_{1,i}l = -2.28$ ) . 実線:  $f_1(X)$  の実部, 破線:  $f_1(X)$  の虚部

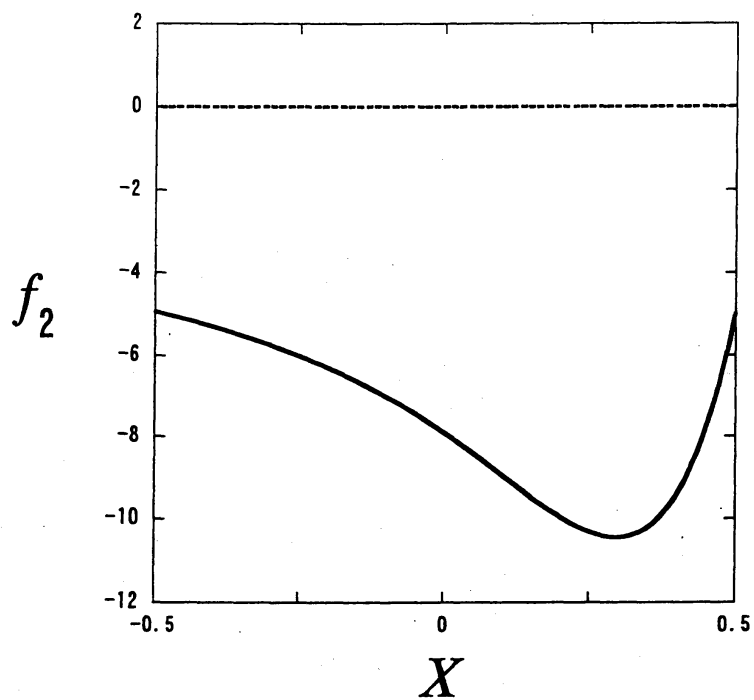


図 12:  $f_2(X)$  の関数形 ( $l = 1.0$ ,  $\chi = 1.0$ ,  $\Omega_E = 15.0$ ,  $q_{2,i}l = 2.28$ ) . 実線:  $f_2(X)$  の実部, 破線:  $f_2(X)$  の虚部

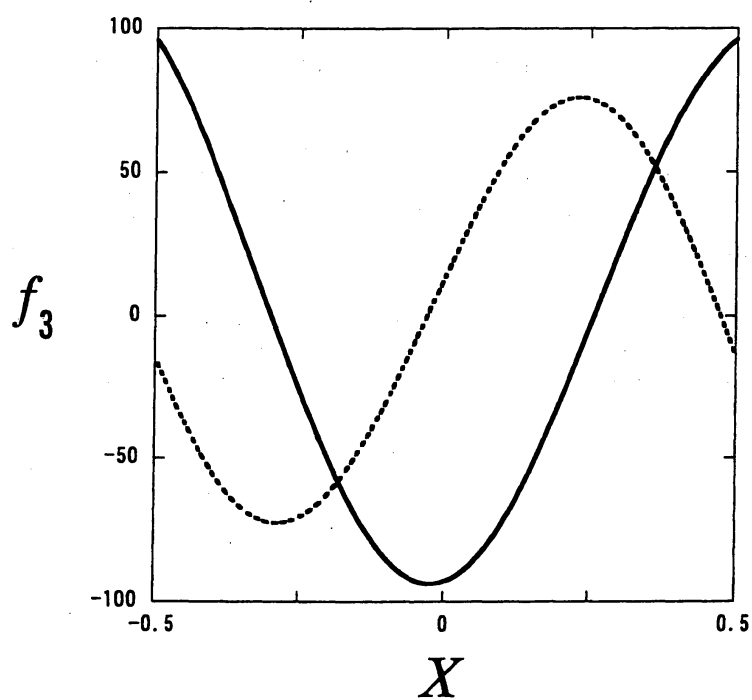


図 13:  $f_3(X)$  の関数形 ( $l = 1.0$ ,  $\chi = 1.0$ ,  $\Omega_E = 15.0$ ,  $q_{3,r}l = 2.00$ ) . 実線:  $f_3(X)$  の実部, 破線:  $f_3(X)$  の虚部.  $f_4(X)$  の実部は  $f_3(X)$  の実部と同じ.  $f_4(X)$  の虚部は  $f_3(X)$  の虚部と  $X$  軸対称

#### 4 まとめと今後の課題

本稿では空間的な周期性をもつ構造を伝播する短波長撓乱について考察するため、系を記述する簡単な力学モデルとして接続はりを考え、はりの変位が小さい場合について考察を行った。接続はりを構成するユニットが剛体はりの場合（接続剛体はり）と弾性はりの場合（接続弾性はり）に分けて接続はりを伝播する波の分散関係を中心にその性質を調べた。

接続剛体はりについてはまず各ユニットの傾きが小さいとして運動方程式を導出し、伝播する波の分散関係を示した。さらに導出した運動方程式の連続体近似を行い、よく知られた均質で一樣な断面をもつ弾性はりの撓み運動の方程式との比較を行った。この結果は、ユニットの長さ $l$ とユニットをつないでいる回転ばねのばね定数 $k$ の積が、一樣で長い弾性はりにおける曲げこわさを与えていることを示しており、弾性はりモデルの新たな見方を与えていると言える。

接続弾性はりについては、個々のユニットの撓み運動の方程式の一般解と、隣接するユニットに関する境界条件から、各ユニットの変位を決める関係式を導出し、行列形式で表した。この行列の固有値と固有ベクトルを用いて各ユニットの変位の式(19)を求め、さらに接続はりの空間的な周期性を用いて、接続はりの変位が基本となる関数系 $f_n$ の和の形(20)で与えられることを示した。 $\lambda_n$ に関する波の分散関係や増幅・減衰の様子、関数系 $f_n$ の具体的な形を図示した。

今後の課題として、接続はりを伝播する波の減衰のメカニズムを各ユニットの固有振動数との関係から調べる、接続はりの周囲に流れがある場合について調べ本稿の結果との比較を行うこと、ユニットの傾きが大きい場合（大振幅の場合）について考察を行うこと等が挙げられる。

#### 参考文献

- [1] D. Li and H. Benaroya, Dynamics of periodic and near-periodic structures, *Applied Mechanics Reviews*, **45**, 447-460 (1992).
- [2] N. Sugimoto, K. Kugo, Y. Watanabe, Derivation of nonlinear wave equation for flexural motions of an elastic beam travelling in an air-filled tube, *Journal of Fluids and Structures*, **16**, 597-612 (2002).
- [3] C. Kittel, *Introduction to solid state physics*, 5th edition, John Wiley & Sons (1976).
- [4] Y. C. Fung, *Foundations of solid mechanics*, Prentice-Hall, 319-325 (1965).